

## Aplicación de algoritmos del álgebra vectorial en el análisis de las magnitudes del movimiento circular

*Raúl Alfonso Fiallos Ortega*

[fiallos.raul@yahoo.es](mailto:fiallos.raul@yahoo.es)

<https://orcid.org/0009-0003-9298-5205>

Escuela E.G.B. Sergio Quirola

Ambato – Ecuador

| Información                                                                                                                                                                              | Resumen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Recibido:</b><br>10/09/2025                                                                                                                                                           | Se realiza un análisis de las características de las magnitudes vectoriales que intervienen en el movimiento circular utilizando para ello las características de las operaciones gráficas y analíticas descritas en el análisis vectorial para la obtención de posiciones lineales y angulares, velocidad angular, velocidad tangencial, y aceleración centrípeta y tangencial, cada una de ellas descritas con coordenadas polares y su equivalente coordenada con vectores base; es importante señalar que para la verificación de los procesos y respuestas se utilizan otras ecuaciones y procesos vectoriales, complementarios entre sí. El trabajo se efectúa desde mínimo tres puntos de vista o enfoques que describen las características del evento; así, el primer criterio es un geométrico vectorial en dos y tres dimensiones, el cual brinda información sobre las características de la magnitud investigada, el segundo criterio es el Físico que informa sobre el comportamiento de la magnitud y el tercer criterio es el matemático en el cual se aplican los modelos matemáticos especialmente los descritos por el análisis vectorial como coordenadas vectoriales, productos vectoriales, vectores unitarios y sus características, es importante señalar que para la verificación de los procesos y respuestas se utilizan otras ecuaciones y procesos vectoriales, complementarios entre sí, lo cual obliga a razonar, justificar e interpretar los resultados obtenidos y procesos utilizados |
| <b>Aceptado:</b><br>06/10/2025                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Palabras clave:</b><br><br>Sistemas de referencia<br>Vector<br>Coordenadas polares<br>Movimiento circular<br>Trayectoria circular<br>Aceleración centrípeta<br>Aceleración tangencial |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

## Application of vector algebra algorithms in the analysis of the magnitudes of circular motion

| Article Info                                                                                                                                                    | Abstract                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Keywords:</b><br>Reference systems<br>Vector<br>Polar coordinates<br>Circular motion<br>Circular path<br>Centripetal acceleration<br>Tangential acceleration | <p>An analysis of the characteristics of the vector magnitudes that intervene in the circular movement is carried out using for it the characteristics of the graphic and analytical operations described in the vector analysis to obtain linear and angular positions, angular velocity, tangential velocity, and acceleration. centripetal and tangential, each of them described with polar coordinates and their coordinate equivalent with tri rectangular basis vectors; It is important to point out that other equations and vector processes, complementary to each other, are used to verify the processes and responses. The work is carried out from a minimum of three points of view or approaches that describe the characteristics of the event; Thus, the first criterion is a vector geometry in two and three dimensions, which provides information on the characteristics of the investigated magnitude, the second criterion is the Physical one that informs about the behavior of the magnitude and the third criterion is the mathematical one in the which mathematical models are applied, especially those described by vector analysis such as vector coordinates, vector products, unit vectors and their characteristics, it is important to point out that for the verification of processes and responses other equations and vector processes are used, complementary to each other, which requires reasoning, justifying and interpreting the results obtained and the processes used.</p> |



## Introducción

El estudiante cuando pasa del bachillerato a la Universidad y opta por carreras de ingeniería como civil, mecánica, eléctrica, mecatrónica, por nombrar algunas, se encuentra muchas veces un problema específico en lo académico, especialmente si no recibió en el bachillerato temas de análisis vectorial y sus aplicaciones a capítulos específicos como mecánica vectorial (cinemática, dinámica, campos eléctricos y magnéticos...), en donde es necesario tener un conocimiento básico de los algoritmos matemáticos que rigen el comportamiento de las magnitudes vectoriales y escalares. En el trabajo que comparto realizo una breve descripción del movimiento circular utilizando propiedades y algoritmos de las operaciones vectoriales, analizo los resultados y los verifico utilizando procesos alternos para dar validez a los procesos. Esta metodología permite adquirir destreza en el manejo de las herramientas matemáticas del análisis vectorial. Espero cumplir las expectativas de docentes y estudiantes de bachillerato o Ciencias básicas de la Universidad.

## Propósito:

Compartir experiencias académicas a nivel de ciencias básicas en la universidad, utilizando procesos matemáticos estudiados del álgebra lineal y análisis vectorial, aplicados al estudio de las magnitudes del movimiento circular.

## Síntesis

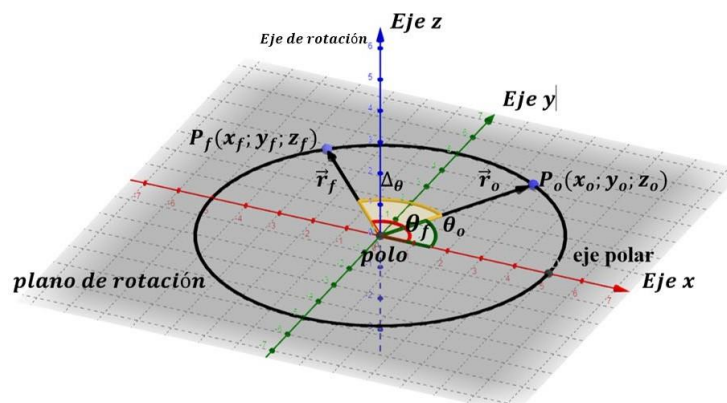
*Aplica con probidad y pertinencia académica las propiedades gráficas y analíticas de las operaciones vectoriales en el estudio de las magnitudes que intervienen en el movimiento circular; realiza un análisis de los resultados y los verifica por procesos complementarios o alternos.*

## Análisis vectorial del movimiento Circular

Para poder realizar un análisis vectorial del movimiento circular de una partícula, se lo debe examinar desde el punto de vista de la trayectoria, resulta la definición más comúnmente encontrada en los textos de Física decir que una partícula describe un movimiento circular cuando su trayectoria es una circunferencia.

### Vector de Posición $\vec{r}$ .

El movimiento circular se desarrolla sobre un sistema de referencia, entonces se requiere *mínimo* de un sistema de coordenadas con dos ejes cartesianos para describirlo, para ello colocamos el origen del sistema de referencia bidimensional en el centro de la trayectoria circular, se puede observar que el **vector posición**  $\vec{r}$  de la partícula tiene siempre la misma magnitud o tamaño que corresponde al radio de la trayectoria, pero su dirección cambia conforme se mueve la partícula y por tanto, conforme transcurre el tiempo



### Vector de posición $\vec{r}$ de la partícula

$$\vec{r} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) [m]$$

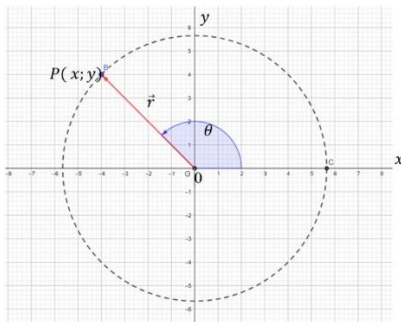
$$\vec{r} = [ |\vec{r}|; \theta; \gamma ] [ m ]$$

|                                                     |                                                                             |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $ \vec{r}  = r = \text{radio de la circunferencia}$ | $x = r \cdot \cos \theta [m]$                                               |
| $\theta = \text{ángulo polar}$                      | $y = r \cdot \sin \theta [m]$                                               |
| $\gamma = \text{ángulo director de } z$             | $z = r \cdot \cos \gamma; \gamma = 90^\circ (\text{ángulo director de } z)$ |

En nuestro caso trabajamos con el *plano de rotación xy* con lo cual nuestra componente espacial  $z$  es 0 ;  $\gamma = \text{ángulo director de } z = 90^\circ$  (medido desde el eje  $z$  hasta el vector  $\vec{r}$ )

Mientras la partícula P se desplaza por la trayectoria circular, su vector de posición barre **ángulos centrales  $\Delta\theta$** . Por esto es conveniente definir variables de tipo angular que permitan analizar este movimiento.

**Posición Angular.** - Es el **ángulo  $\theta$**  que existe entre el vector posición  $\vec{r}$  de la partícula y un eje de referencia que generalmente es el eje polar (eje  $x$ ); es medido en sentido antihorario.

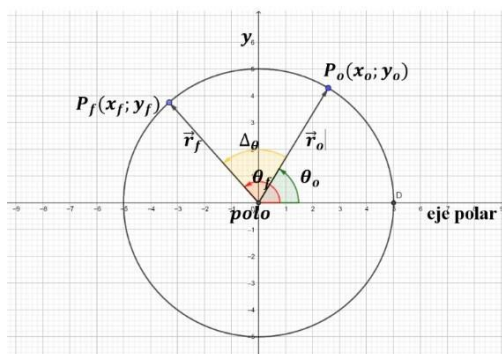


### Posición ángulo $\theta$

El **ángulo  $\theta$** , (ángulo polar) se expresa en grados o radianes, recordando su equivalencia

$$360^\circ = 2\pi$$

**Desplazamiento Angular  $\Delta$ .** - Es la variación neta de la posición angular de una partícula, respecto de un sistema de referencia



**Desplazamiento angular  $\Delta\theta$**

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_o$$

El **ángulo  $\Delta\theta$** , usualmente medido en radianes, descrito por la **variación de posición  $\Delta\vec{r}$** , suele llamarse también ángulo de fase. Si  $\theta_o = 0^\circ$  cuando  $t = 0$  segundos, se tiene:

$$\Delta\theta = \theta$$

**Período.** - Es el *tiempo  $T$*  que tarda el móvil en dar una vuelta o revolución completa. El Período se determina con:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] ; \text{ de la cual}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ [s]}$$

**Frecuencia.** - Es el *número de revoluciones por unidad de tiempo*; la frecuencia  $f$  se expresa en  $\text{s}^{-1}$  hertz se relaciona con el período por:

$$f = \frac{1}{T} \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad [\text{s}^{-1}] = [\text{hertz}] = \left[ \frac{\text{rev}}{\text{s}} \right]$$

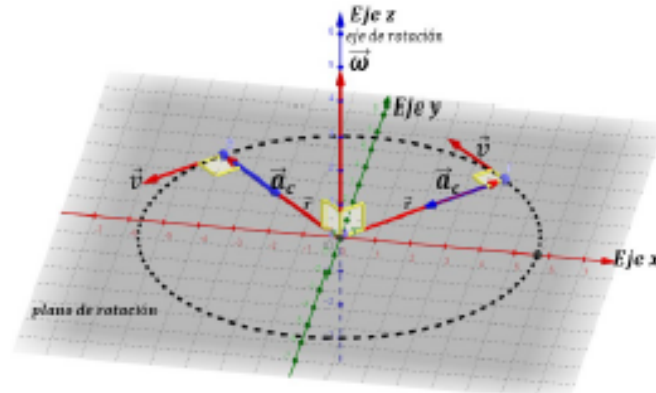
### La velocidad tangencial y la aceleración en el movimiento circular uniforme.

Como la **posición angular  $\theta$**  depende del tiempo, puede concluirse que  $\vec{r}$  también cambiará de dirección conforme transcurre el mismo tiempo pero no cambiará su módulo porque este siempre será igual al radio de la circunferencia, y aplicando la definición de velocidad, podemos introducir una nueva magnitud física vectorial, representada por  $\omega$ , llamada velocidad angular, la misma que físicamente representa una medida de la rapidez de cambio de dirección del vector posición  $\vec{r}$ , es decir la rapidez a la que rota la partícula  $P$ ;  $\omega$  "apunta" en la dirección perpendicular al plano de movimiento, paralela al eje de rotación; esto nos permite definir a la velocidad angular como el ángulo descrito por  $\vec{r}$  en la unidad de tiempo, tendremos pues:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

La unidad de velocidad angular es el radian por segundo

### Magnitudes vectoriales del movimiento circular uniforme



*Magnitudes vectoriales del movimiento circular uniforme*

#### - Velocidad lineal o tangencial $\vec{v}$

Sean los vectores velocidad angular  $\vec{\omega}$  y vector posición  $\vec{r}$  de una partícula animada de movimiento circular.

En cualquier instante los vectores  $\vec{\omega}$  y  $\vec{r}$  son:

$$\vec{\omega} = (0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega\vec{k}) \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad \text{y} \quad \vec{r} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) [m]$$

Siendo:

Rapidez angular  $\omega = \pm \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$

$\omega$  es perpendicular al plano xy de rotación y positivo si el movimiento es antihorario

- La posición  $\vec{r}$  de la partícula P en cualquier instante.

$$\vec{r} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) [m]$$

$$\vec{r} = (r \cdot \cos \theta \vec{i} + r \cdot \text{Sen} \theta \vec{j} + r \cdot \cos \gamma \vec{k}) \text{ [m]}$$

$$x = r \cdot \cos \theta \text{ [m]}$$

$$y = r \cdot \text{sen} \theta \text{ [m]}$$

$$z = r \cdot \cos \gamma \text{ ; } \gamma = 90^\circ \text{ (ángulo director de } z \text{)}$$

Se puede observar en el gráfico que la velocidad  $\vec{v}$  tiene una dirección tangente a la trayectoria.

Las magnitudes vectoriales: *posición*  $\vec{r}$ , *velocidad tangencial*  $\vec{v}$  y *velocidad angular*  $\vec{\omega}$  son mutuamente perpendiculares y *por definición de producto vectorial*, están relacionadas a través de la ecuación vectorial

$$\vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \text{ } \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Siendo:

$$\vec{\omega} = (0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega\vec{k}) \text{ } \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\vec{r} = (r \cos \theta \vec{i} + r \text{ Sen} \theta \vec{j} + r \cdot \cos \gamma \vec{k}) \text{ [m] ; } r \cdot \cos \gamma = 0$$

Para resolver el producto vectorial  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ; utilizamos determinantes:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r \cos \theta & r \text{ Sen} \theta & 0 \end{vmatrix} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Resolviendo el mismo se obtiene:

$$\vec{v} = (-\omega \cdot r \text{ Sen} \theta \vec{i} + \omega \cdot r \cos \theta \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$\text{Su módulo } |\vec{v}| = v = \sqrt{(-\omega \cdot r \text{ Sen} \theta)^2 + (\omega \cdot r \cos \theta)^2}$$

$$v = \sqrt{\omega^2 \cdot r^2 \text{ sen}^2 \theta + \omega^2 \cdot r^2 \cos^2 \theta}$$

$$v = \sqrt{\omega^2 \cdot r^2 (\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)}$$

$$v = \sqrt{\omega^2 r^2}$$

$$v = \omega \cdot r \text{ } \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Ecuación escalar que corresponde a la *rapidez lineal* (tangencial) de la partícula P.

La interpretación geométrica del producto vectorial, nos permite también encontrar la ecuación escalar de  $\vec{v}$ , así:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \cdot \text{Sen}90^\circ \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$|\vec{v}| = v = \omega \cdot r \quad \left[\frac{m}{s}\right] \text{ (Ecuación Escalar)}$$

Importe resultado que nos indica que la velocidad lineal (tangencial) es proporcional al radio  $r$

- El vector Unitario  $\vec{\mu}_v$  de  $\vec{v}$  es:

$$\vec{\mu}_v = \frac{\vec{v}}{v} \quad [\text{adimensional}]$$

$$\vec{\mu}_v = \frac{-\omega \cdot r \text{ Sen}\theta \vec{i} + \omega \cdot r \text{ Cos}\theta \vec{j} + 0\vec{k}}{v}$$

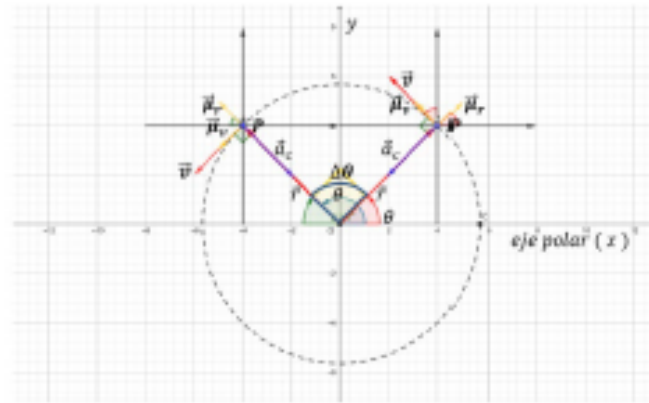
$$\vec{\mu}_v = \frac{-v \text{ Sen}\theta \vec{i} + v \text{ Cos}\theta \vec{j} + 0\vec{k}}{v} : v = \omega \cdot r$$

$$\vec{\mu}_v = \frac{v (-\text{Sen}\theta \vec{i} + \text{Cos}\theta \vec{j} + 0\vec{k})}{v}$$

$$\vec{\mu}_v = (-\text{Sen}\theta \vec{i} + \text{Cos}\theta \vec{j} + 0\vec{k}) \quad [\text{adimensional}]$$

La *aceleración Centrípetra* en el Movimiento circular

Es importante mencionar que a pesar de que el módulo de la *velocidad lineal* no está variando porque la *aceleración tangencial* es nula ( $a_T = 0$ ), dicho movimiento si presenta una *aceleración*, la *centrípetra* o *radial*, constante en módulo, pero variable en dirección. La *aceleración centrípetra* es variable en dirección porque en el transcurso del tiempo y desde diferentes posiciones de la trayectoria circular, siempre “apunta” hacia el centro, modificando también en forma continua la dirección de  $\vec{v}$  (con la cual siempre forma  $90^\circ$ ), podemos afirmar entonces como contra ejemplo: si la *aceleración centrípetra* es cero, tenemos un movimiento rectilíneo y si además la *aceleración tangencial* es cero, tenemos un movimiento rectilíneo uniforme.



*Los vectores unitarios de la posición  $\vec{r}$  y velocidad  $\vec{v}$*

Si observamos el gráfico, el vector aceleración centrípeta  $\vec{a}_c$  y el vector posición  $\vec{r}$  de la partícula, tienen direcciones opuestas en cualquier instante, ante lo cual sus vectores unitarios son iguales, pero de signo contrario.

$$\vec{\mu}_{a_c} = -\vec{\mu}_r$$

En el movimiento circular uniforme es nula la aceleración tangencial de la partícula, pues el módulo de la velocidad  $\vec{v}$  no varía, con lo cual la aceleración Total o resultante  $\vec{a}_R$  en cualquier instante es:

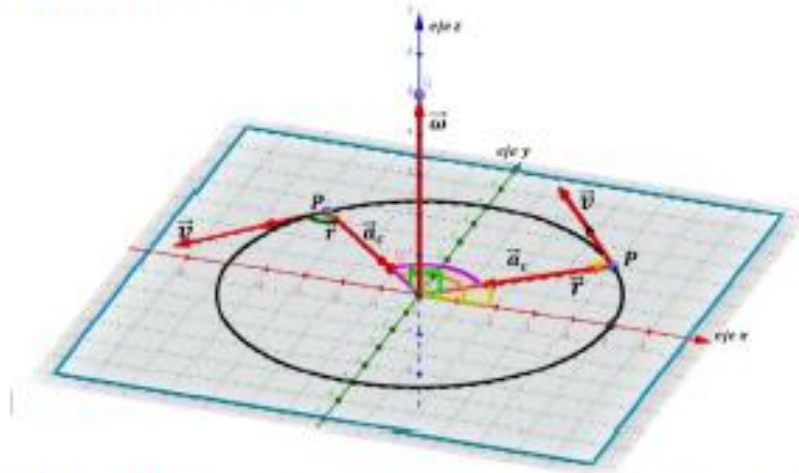
$$\begin{aligned}\vec{a}_R &= \vec{a}_T + \vec{a}_c \\ \vec{a}_R &= \vec{a}_c\end{aligned}$$

Esta aceleración es la característica del movimiento circular uniforme llamada también radial o normal y se obtiene utilizando el producto vectorial entre los vectores velocidad angular y lineal:

$$\vec{a}_c = (\vec{\omega} \times \vec{v}) \quad \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (\text{reemplazando } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r})$$

Gráficamente observamos los vectores:



*Magnitudes vectoriales del Movimiento circular uniforme*

$$\vec{\omega} = (0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega\vec{k}) \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

$$\vec{r} = (x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k}) \quad [m]$$

$$\vec{v} = (-\omega \cdot r \text{ Sen} \theta \vec{i} + \omega \cdot r \text{ Cos} \theta \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s} \right]$$

con los cuales

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega \cdot r \text{ Sen} \theta & \omega \cdot r \text{ Cos} \theta & 0 \end{vmatrix} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

resolviendo el determinante obtenemos:

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = (-\omega^2 \cdot r \text{ cos} \theta \vec{i} - \omega^2 \cdot r \text{ sen} \theta \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

El Módulo de  $\vec{a}_c = |\vec{a}_c| = a_c = \sqrt{(-\omega^2 \cdot r \text{ cos} \theta)^2 + (\omega^2 \cdot r \text{ sen} \theta)^2}$

$$a_c = \sqrt{\omega^4 r^2 \text{ cos}^2 \theta + \omega^4 r^2 \text{ sen}^2 \theta}$$

$$a_c = \sqrt{\omega^4 r^2 (\text{cos}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta)}$$

$$a_c = \sqrt{\omega^4 r^2} \quad ; \quad \text{cos}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

$$a_c = \omega^2 \cdot r \quad \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

El Vector Unitario  $\vec{\mu}_{a_c}$  es:

$$\vec{\mu}_{a_c} = \frac{\vec{a}_c}{a_c} \quad [\text{adimensional}]$$

$$\vec{\mu}_{a_c} = \frac{-\omega^2 \cdot r \text{ cos} \theta \vec{i} - \omega^2 \cdot r \text{ sen} \theta \vec{j} + 0\vec{k}}{\omega^2 \cdot r}$$

$$\vec{\mu}_{a_c} = \frac{\omega^2 \cdot r (-\text{cos} \theta \vec{i} - \text{sen} \theta \vec{j})}{\omega^2 \cdot r}$$

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_{a_c} &= (-\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}) \\ \vec{\mu}_{a_c} &= -(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + 0\vec{k})\end{aligned}$$

Pero  $\vec{\mu}_r = (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} + 0\vec{k})$  entonces se cumple:

$$\vec{\mu}_{a_c} = -\vec{\mu}_r \quad [\text{adimensional}]$$

Importante resultado que lo utilizamos anteriormente y que ahora lo hemos comprobado. Es importante mencionar en el M.C.Uniforme que la velocidad angular es constante, los vectores posición, velocidad tangencial y aceleración son constantes en módulo, pero cambian constantemente de dirección y sentido.

*Ecuaciones escalares de la aceleración centrípeta:*

En el MCU. El módulo de la *aceleración radial o centrípeta*  $\vec{a}_c$  "es constante, pero variable en dirección"; el módulo  $a_c$  es igual a:

$$\begin{aligned}|\vec{a}_c| &= a_c = |\vec{w} \times \vec{v}| \left[ \frac{m}{s^2} \right] \\ |\vec{a}_c| &= a_c = w \cdot v \cdot \sin 90^\circ \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (\text{interpretación geométrica del producto vectorial}) \\ a_c &= w \cdot v \quad (\sin 90^\circ = 1) \\ a_c &= w^2 \cdot r \quad (v = w \cdot r) \\ a_c &= \frac{v^2}{r} \quad (w = \frac{v}{r})\end{aligned}$$

**Unidades:** Las unidades de la aceleración centrípeta son las mismas que las de la aceleración; dimensionalmente

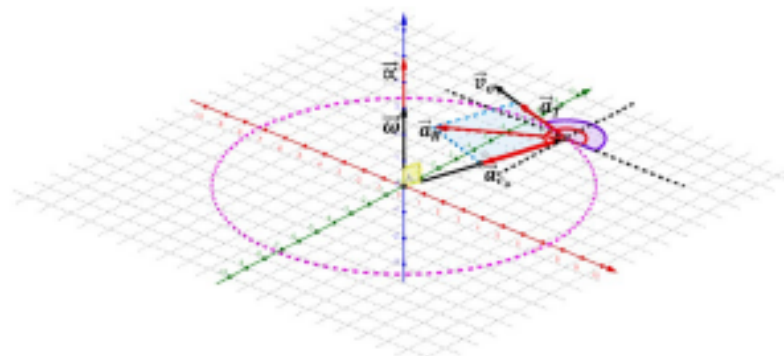
$$[a_c] = [LT^{-2}]$$

Con el resultado de estas ecuaciones escalares (cantidad + unidad) se puede expresar el vector  $\vec{a}_c$ , utilizando las características del vector unitario del vector de posición (radio vector) que lleva la información de dirección y sentido de  $\vec{r}$  así:

$$\vec{a}_c = a_c \cdot (-\vec{\mu}_r) \quad [LT^{-2}]$$

El signo negativo indica que esta aceleración está dirigida hacia el centro de la trayectoria, opuesta al radio vector  $\vec{r}$  de la posición de la partícula ( $-\vec{\mu}_r$ ) y perpendicular a la velocidad  $\vec{v}$ .

Por analogía con el movimiento rectilíneo, ya se puede intuir que una partícula cuya aceleración angular  $\vec{\alpha}$  (*alfa*) es diferente de cero, pero constante, tiene un movimiento circular uniformemente variado, esto implica que la velocidad tangencial cambia, no solo en dirección, sino también en magnitud conforme transcurre el tiempo, debido a que la  $a_T \neq 0$ .



### Magnitudes Vectoriales del Movimiento Circular Uniformemente Variado

Es oportuno recordar las ecuaciones cinemáticas (escalares), que complementan el estudio del comportamiento de una partícula con movimiento circular con *aceleración angular*  $\alpha$  constante, diferente de cero:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot \Delta t$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha \cdot \Delta \theta$$

Considerando a la *aceleración angular*  $\alpha$  constante podemos considerar dos eventos posibles:

1. Si  $\alpha = 0$  tenemos un movimiento circular uniforme y se cumple:
  - a. la *aceleración tangencial* es nula
  - b. La *aceleración centrípeta* o *radial* es la total y es constante
    - i. Si la *aceleración centrípeta* o *radial* es cero tenemos un movimiento rectilíneo
2. Si  $\alpha \neq 0$  tenemos un movimiento circular uniformemente variado y se cumple:
  - a. La *aceleración tangencial* existe y es constante en módulo pero variable en dirección, siendo siempre perpendicular al radio en cualquier punto de la trayectoria.

$$\vec{a}_T \neq \vec{0}$$

- i. La *aceleración tangencial* depende del radio de la circunferencia

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

- ii. Si la *aceleración tangencial* es cero, tenemos un MCU

- b. La *aceleración total* o *resultante* es la suma vectorial de la *aceleración centrípeta* y *tangencial*

Considerando a la *aceleración tangencial* diferente de cero,  $\vec{a}_T \neq \vec{0}$  podemos entonces complementar las ecuaciones vectoriales revisadas en el MCU con la ecuación vectorial de la *aceleración tangencial*  $\vec{a}_T$

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Siendo:

$\vec{\alpha}$  = aceleración angular (alfa)  $\left[\frac{rad}{s^2}\right]$

$\vec{a}_T$  = aceleración tangencial  $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

$\vec{r}$  = vector posición del punto P con respecto al origen [m]

La interpretación geométrica del producto vectorial nos permite convertir a la ecuación vectorial en escalar, así:

$$|\vec{a}_T| = \alpha \cdot r \cdot \sin 90^\circ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$|\vec{a}_T| = a_T = \alpha \cdot r \left[\frac{m}{s^2}\right] \quad (\text{Ecuación escalar})$$

El vector aceleración resultante puede escribirse vectorialmente de la forma siguiente:

$$\vec{a}_R = \vec{a}_c + \vec{a}_T$$

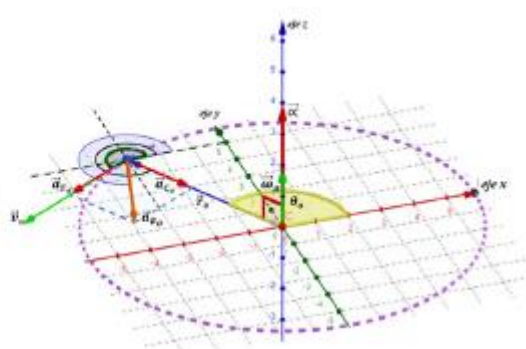
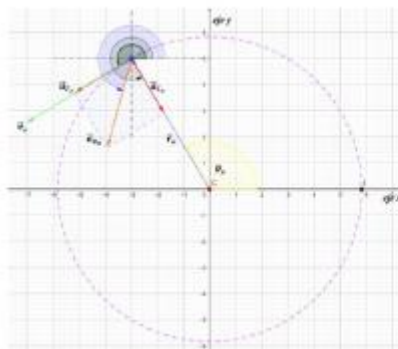
$$\vec{a}_R = (\vec{\omega} \times \vec{v}) + (\vec{\alpha} \times \vec{r})$$

Ejercicio modelo:

Una partícula se desplaza con movimiento circular en sentido antihorario. Si a  $t = 0$  segundos se localiza en el punto  $(-3 ; 5 ; 0)m$  con una rapidez angular de  $\omega_0 = 2 \frac{rad}{s}$  y si en 5 segundos alcanza una rapidez angular de  $\omega = 5 \frac{rad}{s}$ ; Determinar gráfica y analíticamente:

- Posición inicial  $\vec{r}_0$  y posición angular  $\theta_0$
- La aceleración angular empleada
- Desplazamiento angular
- Posición final  $\vec{r}_5$  y posición angular  $\theta_5$  a los 5 segundos
- Velocidad tangencial inicial y final a los 5 segundos
- Aceleración centrípeta, lineal y total inicial
- Aceleración centrípeta, lineal y total a los 5 segundos

Comenzamos a resolver el ejercicio, realizando un diagrama vectorial de las condiciones iniciales del problema.



- Determinamos el *vector posición* inicial

$$\vec{r}_o = (-3\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k})m$$

Analizando el gráfico y por trigonometría determinamos la *posición angular* inicial  $\theta_0$

$$\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$$

$$\theta_0 = 120^{\circ}57'49,5'' = 120,96375^{\circ} = 0,67202\pi \text{ rad}$$

- La *aceleración angular* cuantifica la variación de velocidad en función del tiempo

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_0 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Delta t = 5 \text{ segundos}$$

$$\alpha = \frac{5 \frac{\text{rad}}{\text{s}} - 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{5 \text{ s}}$$

$$\alpha = 0.6 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

A la *aceleración angular*  $\alpha = 0.6 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$  le expresamos como vector perpendicular al plano de rotación y por estar *situada sobre el eje z* su expresión vectorial es :

$$\vec{\alpha} = (0\vec{i} + 0\vec{j} + 0.6\vec{k}) \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

- La *velocidad tangencial* inicial la obtenemos por el producto vectorial

$$\vec{v}_o = (\vec{\omega}_o \times \vec{r}_o) \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$\vec{\omega}_o = (0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}) \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\vec{r}_o = (-3\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}) [m]$$

$$|\vec{v}_o| = \sqrt{(-10)^2 + (-6)^2 + 0^2} = 11,6619 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Verificamos este valor por proceso escalar:

$$|\vec{v}_o| = v_o = \omega \cdot \text{radio}$$

$$|\vec{v}_o| = v_o = 2 \left[ \frac{rad}{s} \right] \cdot \sqrt{34} [m]$$

$$|\vec{v}_o| = v_o = 2 \sqrt{34} \left[ \frac{m}{s} \right] = 11,6619 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

- La aceleración centrípeta en la posición inicial

$$\vec{a}_{c_o} = (\vec{\omega}_o \times \vec{v}_o) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{\omega}_o = (0\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}) \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

$$\vec{v}_o = (-10\vec{i} - 6\vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Resolvemos el determinante:

$$\vec{a}_{c_o} = (\vec{\omega}_o \times \vec{v}_o) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -10 & -6 & 0 \end{vmatrix} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{a}_{c_o} = (\vec{\omega}_o \times \vec{v}_o) = [(0 + 12)\vec{i} - (0 + 20)\vec{j} + 0\vec{k}] \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{a}_{c_o} = (12\vec{i} - 20\vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Verificamos esta respuesta utilizando el vector unitario de  $\vec{r}_o$

$$\vec{a}_{c_o} = |\vec{a}_{c_o}| \cdot (-\vec{\mu}_{r_o})$$

Para utilizar esta ecuación obtenemos el vector unitario de  $\vec{r}_o$  y la aceleración centrípeta en la posición inicial  $\vec{r}_o$  así:

$$\vec{\mu}_{r_o} = \frac{\vec{r}_o}{|\vec{r}_o|}$$

$$\vec{r}_o = (-3\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}) [m]$$

$$|\vec{r}_o| = r = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2 + (0)^2} = \sqrt{34} [m]$$

$$\vec{\mu}_{r_o} = \frac{\vec{r}_o}{|\vec{r}_o|}$$

$$\vec{\mu}_{r_o} = \frac{(-3\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}) [m]}{\sqrt{34} [m]}$$

$$\vec{\mu}_{r_o} = -\frac{3\sqrt{34}}{34}\vec{i} + \frac{5\sqrt{34}}{34}\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$-\vec{\mu}_{r_o} = \left[ +\frac{3\sqrt{34}}{34}\vec{i} - \frac{5\sqrt{34}}{34}\vec{j} + 0\vec{k} \right]$$

Para el cálculo de la aceleración centrípeta en forma escalar tenemos las ecuaciones:

$$|\vec{a}_{c_o}| = a_{c_o} = \frac{v_o^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \omega \cdot v$$

seleccionamos la segunda ecuación

$$|\vec{a}_{c_o}| = a_{c_o} = \omega^2 \cdot r = (2 \frac{rad}{s})^2 \cdot \sqrt{34} m = 4 \frac{rad^2}{seg^2} \cdot \sqrt{34} m = 4\sqrt{34} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Aplicamos la ecuación para obtener  $\vec{a}_{c_o}$

$$\vec{a}_{c_o} = |\vec{a}_{c_o}| \cdot (-\vec{\mu}_{r_o})$$

$$\vec{a}_{c_o} = 4\sqrt{34} \left[ \frac{m}{s^2} \right] \cdot (+\frac{3\sqrt{34}}{34}\vec{i} - \frac{5\sqrt{34}}{34}\vec{j} + 0\vec{k})$$

Realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la aceleración centrípeta en la posición inicial:

$$\vec{a}_{c_o} = (+12\vec{i} - 20\vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Resultado que coincide con la respuesta obtenida por el producto vectorial

$$\vec{a}_{c_o} = (\vec{\omega}_o \times \vec{v}_o) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Si obtenemos el módulo de  $\vec{a}_{c_o}$

$$|\vec{a}_{c_o}| = a_{c_o} = \sqrt{(12)^2 + (-20)^2 + (0)^2} = 23,3238 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

La respuesta coincide con la respuesta del proceso escalar:

$$|\vec{a}_{c_o}| = a_{c_o} = \omega^2 \cdot r = 4\sqrt{34} \left[ \frac{m}{s^2} \right] = 23,328 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

- La *aceleración tangencial*  $\vec{a}_{T_o}$  en la posición inicial  $\vec{r}_o$

$$\vec{a}_{T_o} = (\vec{\alpha} \times \vec{r}_o) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{\alpha} = (0\vec{i} + 0\vec{j} + 0,6\vec{k}) \left[ \frac{rad}{s^2} \right]$$

$$\vec{r}_o = (-3\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}) [m]$$

$$\vec{a}_{T_o} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0,6 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Resolvemos el determinante:

$$\vec{a}_{T_o} = [(0 - 3)\vec{i} - (0 + 1,8)\vec{j} + 0\vec{k}] \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{a}_{T_o} = (-3\vec{i} - 1,8\vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Con estos resultados podemos ya obtener la **aceleración total o resultante**  $\vec{a}_{R_o}$  en la *posición inicial* con la *suma vectorial* de la aceleración centrípeta y aceleración tangencial así:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{R_o} &= \vec{a}_{T_o} + \vec{a}_{c_o} \\ \vec{a}_{R_o} &= (-3\vec{i} - 1,8\vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right] + (12\vec{i} - 20\vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right] \\ \vec{a}_{R_o} &= (9\vec{i} - 21,8\vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]\end{aligned}$$

Ahora determinemos la aceleración total o resultante de la partícula alcanzada a los 5 segundos, para ello empezamos calculando la posición angular inicial:

La posición angular inicial es:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{34}}\right) \\ \theta_0 &= 120^{\circ}57'49,5'' = 120,96375^{\circ} = 0,67202\pi \text{ rad}\end{aligned}$$

El *desplazamiento angular* realizado por la partícula en 5 segundos es:

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2 \\ \Delta\theta &= \left(2 \frac{\text{rad}}{s}\right)(5 \text{ s}) + \frac{1}{2} \left(0,6 \frac{\text{rad}}{s^2}\right)(5 \text{ s})^2 \\ \Delta\theta &= 17,5 \text{ rad} = 1002^{\circ}40'34''\end{aligned}$$

- La *posición angular final* a los 5 segundos la calculamos con la ecuación de la variación de posición angular  $\Delta\theta = \theta - \theta_0$  [rad], o directamente con la ecuación de la posición angular en función del tiempo

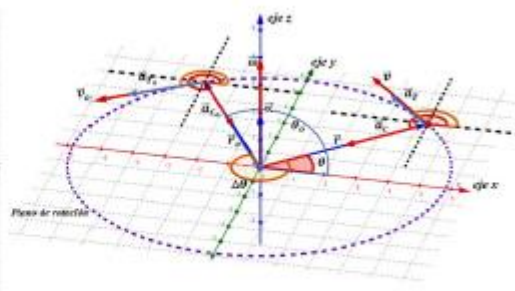
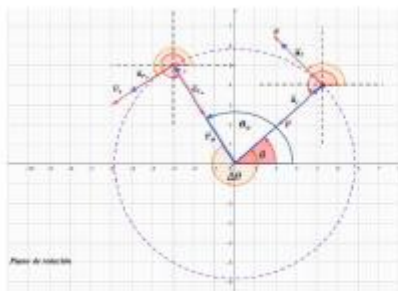
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2$$

Utilicemos el *desplazamiento angular o variación de posición angular*:

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 \quad [\text{rad}]$$

Despejamos la posición angular final  $\theta$

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \Delta\theta \quad [\text{rad}] \\ \theta &= 0,67202\pi \text{ rad} + 17,5 \text{ rad} \\ \theta &= 19,6054 \text{ rad} = 1123^{\circ}18'43'' = 43^{\circ}18'43,71'' \quad [\text{ángulo coterminal}] \\ &\quad (\text{posición angular final de la partícula alcanzada a los 5 segundos})\end{aligned}$$



El vector posición final los 5 segundos

$$\begin{aligned}\vec{r} &= [\text{radio} ; \text{ángulo polar} ; \text{ángulo director de } z] && (\text{coordenadas polares de } \vec{r}) \\ \vec{r} &= [\sqrt{34}\text{m}; 43,312^\circ; 90^\circ] && (\text{coordenadas polares de } \vec{r}) \\ \vec{r} &= (r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k})[m] && (\text{coordenadas vector base de } \vec{r})\end{aligned}$$

Las componentes cartesianas son :

$$r_x = r \cdot \cos 43,312^\circ = \sqrt{34} \cdot \cos 43,312^\circ = 4,2427 [m]$$

$$r_y = r \cdot \cos 43,312^\circ = \sqrt{34} \cdot \cos 43,312^\circ = 3,9998 [m]$$

$$r_z = r \cdot \cos 90^\circ$$

$$\vec{r} = (4,244 \vec{i} + 3,999 \vec{j} + 0\vec{k})[m]$$

- La *velocidad* tangencial  $\vec{v}$  en la posición final de la partícula a los 5 segundos

$$\vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Y los vectores necesarios para aplicar en la ecuación son:

$$\vec{\omega} = (0\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}) \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

$$\vec{r} = (4,244 \vec{i} + 3,999 \vec{j} + 0\vec{k})[m] \text{ (módulo es igual al radio de la circunferencia)}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{34} [m]$$

Resolvemos el determinante:

$$\vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 4,244 & 3,999 & 0 \end{vmatrix} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$\vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) = [(0 - 19,985)\vec{i} - (0 - 21,220)\vec{j} + 0\vec{k}] \left[ \frac{rad}{s} \right] \cdot [m]$$

$$\vec{v} = (-19,995 \vec{i} + 21,220 \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s} \right]$$

- El módulo de  $\vec{v}$  es

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-19,995)^2 + (21,220)^2 + (0)^2} = 29,156 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Verificamos este resultado utilizando la ecuación escalar para obtener la rapidez tangencial

$$v = |\vec{v}| = \omega \cdot \text{radio} = 5 \left[ \frac{rad}{s} \right] \sqrt{34}[m] = 29,154 \frac{m}{s}$$

- La *aceleración centrípeta* a los 5 segundos

$$\vec{a}_c = (\vec{\omega} \times \vec{v}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Para resolver esta ecuación utilizamos los vectores:

$$\vec{\omega} = (0\vec{i} + 0\vec{j} + 5\vec{k}) \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

$$\vec{v} = (-19,9996 \vec{i} + 21,2135 \vec{j} + 0 \vec{k}) \left[ \frac{m}{s} \right].$$

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ -19,9996 & 21,2135 & 0 \end{vmatrix} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Resolvemos el determinante y obtenemos:

$$\vec{a}_c = [(0 - 106,0675) \vec{i} - (99,998) \vec{j} + 0 \vec{k}] \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{a}_c = (-106,0675 \vec{i} - 99,998 \vec{j} + 0 \vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\text{Su módulo } |\vec{a}_c| = a_c = \sqrt{(-106,0675)^2 + (-99,998)^2 + (0)^2} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$|\vec{a}_c| = a_c = 145,7735 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Por procedimientos escalares se verifica esta respuesta

$$|\vec{a}_c| = a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \omega \cdot v; \text{ (seleccionamos la segunda ecuación)}$$

$$|\vec{a}_c| = a_c = \omega^2 \cdot \text{radio}$$

$$|\vec{a}_c| = \left( 5 \frac{\text{rad}}{s} \right)^2 \cdot \sqrt{34} \text{ m} = 25\sqrt{34} \left[ \frac{m}{s^2} \right] = 145,7737 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Utilicemos las propiedades de vector unitario de unitario de  $\vec{r}$  para verificar esta respuesta

$$\vec{a}_c = |\vec{a}_c|(-\vec{\mu}_r)$$

Para aplicar esta ecuación primero obtenemos el módulo de la aceleración centrípeta y luego el vector unitario de la posición:

$$\text{- módulo de la aceleración centrípeta } a_c = \omega^2 \cdot r \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$a_c = \left( 5 \frac{\text{rad}}{s} \right)^2 \cdot \sqrt{34} [m]$$

$$a_c = 25\sqrt{34} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\text{- Obtenemos ahora el vector unitario de la posición final } \vec{r}$$

$$\vec{\mu}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

El vector  $\vec{r}$  de la posición final de la partícula a los 5 segundos es:

$$\vec{r} = (4,2427 \vec{i} + 3,9999 \vec{j} + 0 \vec{k}) [m]$$

su módulo es igual al radio de la circunferencia  $|\vec{r}| = \sqrt{34} [m]$ , entonces el vector unitario buscado es:

$$\vec{\mu}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{(4,2427 \vec{i} + 3,9999 \vec{j} + 0 \vec{k}) [m]}{\sqrt{34} [m]}$$

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_r &= (0,72761 \vec{i} + 0,68597 \vec{j} + 0 \vec{k}) \\ -\vec{\mu}_r &= (-0,72761 \vec{i} - 0,68597 \vec{j} + 0 \vec{k})\end{aligned}$$

Con estas respuestas ya podemos aplicar la ecuación

$$\begin{aligned}\vec{a}_c &= |\vec{a}_c|(-\vec{\mu}_r) \\ \vec{a}_c &= 25\sqrt{34} \left[ \frac{m}{s^2} \right] \cdot (-0,72761 \vec{i} - 0,68597 \vec{j} + 0 \vec{k}) \\ \vec{a}_c &= (-106,06647 \vec{i} - 99,99645 \vec{j} + 0 \vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]\end{aligned}$$

Coincide con la respuesta obtenida utilizando el producto vectorial  $\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v}$

- La *aceleración tangencial* a los 5 segundos

Utilizamos el producto vectorial

$$\vec{a}_T = (\vec{\alpha} \times \vec{r}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Para esta ecuación necesitamos los vectores:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= (0\vec{i} + 0\vec{j} + 0,6\vec{k}) \left[ \frac{rad}{s^2} \right] \\ \vec{r} &= (4,2427 \vec{i} + 3,9999 \vec{j} + 0\vec{k})[m]\end{aligned}$$

Resolvemos el determinante

$$\begin{aligned}\vec{a}_T &= \vec{\alpha} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0,6 \\ 4,2427 & 3,9999 & 0 \end{vmatrix} \left[ \frac{m}{s^2} \right] \\ \vec{a}_T &= \vec{\alpha} \times \vec{r} = [(0 - 2,3999)\vec{i} - (0 - 2,5456)\vec{j} + 0\vec{k}] \left[ \frac{m}{s^2} \right] \\ \vec{a}_T &= (-2,3999 \vec{i} + 2,5456 \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]\end{aligned}$$

Respuesta que verificamos utilizando las propiedades del unitario de  $\vec{v}$  :

$$\vec{a}_T = |\vec{a}_T| \cdot (\vec{\mu}_v) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Siendo:

$$|\vec{a}_T| = a_T = \alpha \cdot radio \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\alpha = 0,6 \left[ \frac{rad}{s^2} \right]$$

$$a_T = 3,4985 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

- El vector unitario de la velocidad es  $\vec{\mu}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\vec{v} = (-19,9996 \vec{i} + 21,2135 \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-19,9996)^2 + (21,2135)^2 + (0)^2} = 29,137 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Entonces el vector unitario de  $\vec{v}$  es :

$$\vec{\mu}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{\mu}_v = \frac{(-19,9996 \vec{i} + 21,2135 \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s} \right]}{29,137 \left[ \frac{m}{s} \right]}$$

$$\vec{\mu}_v = (-0,68639 \vec{i} + 0,72806 \vec{j} + 0\vec{k})$$

Con esta información podemos ya aplicar la ecuación:

$$\vec{a}_T = |\vec{a}_T| \cdot (\vec{\mu}_v)$$

$$|\vec{a}_T| = a_T = 3,4985 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{a}_T = 3,4985 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \cdot (-0,68639 \vec{i} + 0,72806 \vec{j} + 0\vec{k})$$

$$\vec{a}_T = (-2,4013 \vec{i} + 2,54711 \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

Vector que es una muy buena aproximación a la respuesta obtenida por producto vectorial

$$\vec{a}_T = \vec{a} \times \vec{r}$$

- La *aceleración total* resultante a los 5 segundos es :

$$\vec{a}_R = \vec{a}_T + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_R = (-2,4009 \vec{i} + 2,54711 \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right] + (130,992 \vec{i} + 63,746 \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\vec{a}_R = (128,5911 \vec{i} + 66,29311 \vec{j} + 0\vec{k}) \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

## Referencias bibliográficas

- Almeida, M; Córdova, C; Tasiguano, M; y otros. (2011); *Física para prepolitécnico*; Editorial PrepoFis *Física, Escuela Politècnica Nacional, Quito*
- Arenas, F.; ( 2020 ) ; *Física Universitaria*; Editorial Jorge Sarmiento Universitas
- Apostol, T.; ( 1990 ) ; *Calculus I* ; Editorial Reverté
- Castro, L.; Willian, A.; Agudelo, R.; y otros; (2018); *Física Mecánica*; Editorial Universidad Católica de Colombia
- Córdova, L.; ( 2015 ) ; *Física mecánica*; Editorial Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
- Gómez, N.; Tejada, L.; (2020); *Física General*; Editorial Universidad Abierta para adultos
- Grossman, S.; Flores, S.; (2019); *Algebra Lineal*; editorial McGraw Hill
- Kemmer, N.; (2016); *Análisis Vectorial*; Editorial Reverté
- Lira, S.; (2008); *Didáctica Vectorial*; Editorial Instituto Politécnico Nacional
- Pérez, H.; (2010); *Física: Para bachilleratos tecnológicos*; Editorial Grupo Editorial Patria
- Resnick, R.; Halliday, D; Krane, K.; (2001); *Física I* ; Compañía editorial Continental
- Serway, R.; (2018); *Física para Ciencias e Ingeniería*; Editorial Cengage Learning; décima edición
- Shilov, G.; (1977); *Linear Algebra*; Dover Publications
- Spirav, M. ;( 2012); *Calculus*; Editorial Reverté
- Sternhein, M.; Kane, J. (2016); *Física*; Editorial Reverté
- Tasiguano, M.; Camacho, X.; Aldaz, O.; Vallejo, P. ; ( 2010 ) ; *Física* ; Editorial PrepoFis, Escuela Politécnica Nacional Quito